ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки
Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-776-783
УДК 519.237; 519.24

МОДЕЛИ МОНИТОРИНГА И УПРАВЛЕНИЯ РИСКОМ В ГАУССОВСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© **А. Н. Тырсин**[1], **А. А. Сурина**[2]

[1] ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: at2001@yandex.ru
[2] ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
454080, Российская Федерация, г. Челябинск, пр. Ленина, 76
E-mail: dallila87@.ru

Аннотация. Описана модель риска многомерных стохастических систем. Она основана на гипотезе, состоящей в том, что риск характеризуется вероятностными свойствами компонент системы, в качестве которых используют факторы риска. Исследован случай гауссовских стохастических систем. Модель мониторинга риска позволяет оценивать текущий риск системы и вклад в него всех ее компонент. Модели управления риском представляют собой оптимизационные задачи. В качестве целевых функций могут использоваться условный минимум риска и достижение им заданного уровня при минимальных изменениях вероятностных характеристик системы.
Ключевые слова: модель; риск; стохастическая система; случайный вектор; нормальное распределение; мониторинг; оптимизация

Введение

Исследование безопасности сложных систем опирается на теорию риска. В широком смысле под риском понимают возможную опасность какого-либо неблагоприятного исхода. Реальные системы, как правило, являются многомерными, их функционирование во многом носит стохастический характер, у них часто можно выделить десятки различных факторов риска [1]. При решении задачи управления риском необходимо опираться на модель риска. Обычно моделирование риска сводится к выделению опасных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00315а).

исходов, количественному заданию последствий от их наступления и оцениванию вероятностей этих исходов [2]. Для относительно простых объектов, когда можно априори указать все опасные исходы при наличии статистической информации или экспертных оценок о шансах их появления в целом, данный подход дает приемлемые на практике результаты. Однако для многих сложных систем, например в экономике, обществе, здравоохранении и др., выделить все эти опасные исходы не представляется возможным.

В [3] предложен подход к моделированию риска, согласно которому стохастическую систему представляют в виде случайного вектора с взаимно коррелированными компонентами, а в качестве управляющих переменных используют его числовые характеристики. Целью статьи является описание модели мониторинга и управления риском на основе данного подхода на примере гауссовской стохастической системы.

1. Модель анализа риска

Представим состояние сложной системы в виде некоторой многомерной стохастической системы. Выделим в этой системе факторы риска $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_m$. В результате получим представление системы в виде случайного вектора $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_m)$ с некоторой плотностью вероятности $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$.

Вместо выделения конкретных опасных ситуаций будем задавать геометрические области неблагоприятных исходов. Они могут выглядеть произвольным образом в зависимости от конкретной задачи и определяются на основе имеющейся априорной информации. Для определенности опишем предлагаемый подход на примере распространенной концепции опасных состояний как больших и маловероятных отклонений случайной величины. Тогда опасными ситуациями будем считать большие и маловероятные отклонения выборочных значений x_{ij} любой из компонент X_j относительно наилучших в смысле безопасности значениях $\theta_j,\ \ j = 1,\ 2,\ \dots,\ m$. Если априорная информация о значениях θ_j отсутствует, то считаем, что они равны математическим ожиданиям $\mu_j = M[X_j]$ случайных величин X_j, то есть $\theta_j = \mu_j,\ \ j = 1,\ 2,\ \dots,\ m$. Тогда вероятность неблагоприятного исхода для каждой из компонент X_j определим как

$$P(D_j) = P(X_j \in D_j) = P(X_j \notin \bar{D}_j), \bar{D}_j = \{x:\ d_j^- < x < d_j^+\},$$

где $d_j^-,\ \ d_j^+$ – заданные левая и правая границы допустимых значений ($d_j^- < d_j^+$), то есть область благоприятных исходов ограничена диапазоном $(d_j^-;\ d_j^+)$.

Введем нижний b_j^- и верхний b_j^+ пороговые уровни допустимых отклонений относительно значений θ_j как $b_j^- = \theta_j - d_j^-,\ \ b_j^+ = d_j^+ - \theta_j$, при этом область благоприятных исходов $\bar{D}_j$ для каждой компоненты X_j описывается диапазоном $(\theta_j - b_j^-;\ \theta_j + b_j^+)$.

Если задана только правая граница d_j^+ допустимых значений, то считаем $d_j^- = -\infty$ и $\bar{D}_j = \{x:\ x < d_j^+\} = \{x:\ x < \theta_j + b_j^+\}$, при только определенной левой границе d_j^- имеем $d_j^+ = +\infty$ и $\bar{D}_j = \{x:\ x > d_j^-\} = \{x:\ x > \theta_j - b_j^-\}$. Выражение $d_j^- = -\infty$ ($d_j^+ = +\infty$) означает, что значения фактора риска X_j менее (более) θ_j являются такими же безопасными, как и $X_j(\theta_j)$.

Теперь необходимо описать многомерную область опасных ситуаций D, учтя взаимное влияние компонент на появление неблагоприятных исходов. Она равна $D = \mathbf{R}^m \backslash \bar{D}$, где $\bar{D}$ – область допустимых значений факторов риска. Опишем область $\bar{D}$. Это можно сделать различными способами. Наиболее оправданным с геометрической точки зрения представляется задать ее в виде внутренней области m-осного эллипсоида

$$\bar{D} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) : \sum_{j=1}^{m} \frac{(x_j - \theta'_j)^2}{b_j^2} < 1 \right\}$$

с центром в точке $\theta' = (\theta'_1,\ \theta'_2,\ \ldots\ ,\ \theta'_m)$, причем для любого $j = 1,\ 2,\ \ldots, m$

$$\theta'_j = \begin{cases} \theta_j, & d_j^- = -\infty \ \vee \ d_j^+ = +\infty, \\ \frac{(d_j^- + d_j^+)}{2}, & d_j^- > -\infty \ \wedge \ d_j^+ < +\infty, \end{cases} \qquad b_j = \begin{cases} \frac{(b_j^- + b_j^+)}{2}, & d_j^- > -\infty \ \wedge \ d_j^+ < +\infty, \\ b_j^-, & d_j^+ = +\infty, \\ b_j^+, & d_j^- = -\infty. \end{cases}$$

Тогда для случайного вектора $\mathbf{X}$ вероятность неблагоприятного исхода будет равна

$$P(D) = P(\mathbf{X} \in D), D = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) : \sum_{j=1}^{m} \frac{(x_j - \theta'_j)^2}{b_j^2} \geq 1 \right\}. \qquad (1)$$

Область D в (1) представляет собой внешнюю область m-осного эллипсоида, у которого полуоси по каждой из координат равны b_j соответственно. Очевидно, когда исход не лежит на одной из осей, то событие $(\mathbf{X} \in D)$ может реализоваться и при отсутствии рисковых отклонений по всем компонентам (возможны ситуации $\mathbf{X} \in D$ и $\forall j \ X_j \notin D_j$). Задав функцию последствий от опасных ситуаций (функцию риска) в виде $g(\mathbf{x})$, получим модель для количественной оценки уровня риска

$$r(\mathbf{X}) = \int\limits_{\mathbf{R}^m} g(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \qquad (2)$$

Если в (2) принять $g(\mathbf{x}) = 1 \ \forall \mathbf{x} \in D$ и $g(\mathbf{x}) = 0 \ \forall \mathbf{x} \notin D$, то $r(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X} \in D)$, то есть уровень риска будет равен вероятности неблагоприятного исхода. На ранней стадии исследования системы сложно достаточно точно описать функцию $g(\mathbf{x})$, поэтому формула (2) становится оценкой $P(D)$ и является удобным начальным приближением модели риска.

Для задания функции $g(\mathbf{x})$ требуется количественная оценка последствий для исследуемой системы в зависимости от значений факторов риска. Это требует проведения отдельного исследования. Предложим вариант задания функции риска.

1. Считаем, что функция $g(\mathbf{x})$ является неотрицательной и непрерывной всюду на $\mathbf{R}^m$, причем $g(\theta') = 0$.

2. Считаем, что $\forall \mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$ и $\forall \alpha > 1$ $g(\theta' + \alpha \mathbf{z}) \geq g(\theta' + \mathbf{z})$, то есть функция $g(\mathbf{x})$ не убывает по любому направлению из точки θ'.

3. Считаем, что по каждому фактору риска есть информация хотя бы об одном из предельных значениях: D_j^- левее θ_j и D_j^+ правее θ_j, при достижении которых последствия становятся практически неуправляемыми или необратимыми. Если $d_j^- = -\infty$ ($d_j^+ = +\infty$), то считаем, что $D_j^- = -\infty$ ($D_j^+ = +\infty$).

4. $\forall D_j^- > -\infty \;\; g(\theta_1', \, \dots, D_j^-, \, \dots, \;\; \theta_m') = 1$ и $\forall D_j^+ < +\infty \;\; g(\theta_1', \, \dots, D_j^+, \, \dots, \;\; \theta_m') = 1$.

Тогда функцию риска можно задать, например, как

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (x_j - \theta_j')^2, \tag{3}$$

или

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j (x_j - \theta_j')^2, \; \mathbf{x} \in D, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\quad \mathbf{x} \in \bar{D}, \end{cases} \tag{4}$$

где $\alpha_j = 1/(D_j^- - \theta_j')^2, \; \forall x_j < \theta_j'$ и $\alpha_j = 1/(D_j^+ - \theta_j')^2, \; \forall x_j \geq \theta_j'$.

Очевидно, что если $D_j^- = -\infty$ и $x_j < \theta_j'$ или $D_j^+ = +\infty$ и $x_j \geq \theta_j'$, то $\alpha_j = 0$.

В задачах мониторинга риска, наряду с оценкой уровня риска $r(\mathbf{X})$ по всем факторам риска $X_1, \; X_2, \; \dots, \; X_m$ многомерной системы, целесообразно оценить вклад каждого фактора в суммарный риск. Введем случайный вектор $\mathbf{X}_k^- = (X_1, ..., X_{k-1}, X_{k+1}, ..., X_m)$. Тогда абсолютное и относительное изменение риска многомерной системы за счет добавления фактора X_k равно

$$\Delta r(X_k) = r(\mathbf{X}) - r(\mathbf{X}_k^-), \delta r(X_k) = \Delta r(X_k)/r(\mathbf{X}_k^-). \tag{5}$$

Отметим, что наряду с вкладом в общий риск одного фактора формулы (1)–(5) позволяют оценивать влияние и группы факторов.

Мониторинг риска на основе модели (1)–(5) заключается в последовательном оценивании во времени фактических значений величин $r(\mathbf{X})$, $\Delta r(X_k)$, $\delta r(X_k)$, $j = 1, 2, \dots, m$, а также динамики их изменения.

2. Модели управления риском в гауссовских системах

Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда $\mathbf{X}$ имеет совместное нормальное распределение с плотностью вероятности

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \, |\Sigma|}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right\},$$

где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, .., a_m)^T$ – вектор математических ожиданий, $\mathbf{\Sigma} = \{\sigma_{ij}\}_{m \times m}$ – ковариационная матрица, $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ – дисперсия.

Использование гауссовского случайного вектора опирается на центральную предельную теорему [4]. Следует отметить, что данное упрощение не столь критично, и если есть какие-либо основания считать, что плотности вероятностей компонент вектора $\mathbf{X}$ имеют «более вытянутые хвосты», то это можно скорректировать за счет соответствующего задания функции $g(\mathbf{x})$.

Суть управления риском гауссовской системой состоит в следующем. Задав функцию последствий от опасных ситуаций $g(\mathbf{x})$ и введя ограничения на допустимые значения элементов ковариационной матрицы $G(\mathbf{\Sigma})$ и средних значений компонент системы $H(\mathbf{a})$, сформулируем задачу минимизации риска с переменными $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{a}$

$$\begin{cases} r(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{a}) = \int\limits_{\mathbf{R}^m} g(\mathbf{x}) p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \ \to \ \min\limits_{\mathbf{\Sigma}, \mathbf{a}}, \\ \mathbf{\Sigma} \in G(\mathbf{\Sigma}), \ \ \mathbf{a} \in H(\mathbf{a}). \end{cases} \tag{6}$$

Задача (6) является задачей нелинейного программирования. Ее можно решить разными методами. Одним из них является метод барьерных функций (внутренних штрафных функций) [5]. Его основная идея состоит в преобразовании задачи поиска условного экстремума к последовательности задач нахождения безусловного экстремума вспомогательной функции $F(\mathbf{X}, b_k) = r(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{a}) + P(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{a}, b_k)$, где $P(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{a}, b_k)$ – штрафная функция, b_k – параметр штрафа.

Управление многомерным риском в виде задачи условной минимизации (6) может приводить к мало реализуемым на практике решениям. В таких случаях решается задача достижения требуемого значения риска при минимальном изменении числовых характеристик случайного вектора $\mathbf{X}^0$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \sum_{k=j}^m (\sigma_{jk} - \sigma_{jk}^0)^2 + \sum_{i=1}^m (a_i - a_i^0)^2 \to \min\limits_{\mathbf{a}, \mathbf{\Sigma}}, \\ r(\mathbf{X}) = r^*, \ \mathbf{\Sigma} \in G(\mathbf{\Sigma}), \ \mathbf{a} \in H(\mathbf{a}). \end{cases}$$

Заключение

1. Предложен новый подход к риск-анализу сложных систем. В его основе лежит моделирование системы в виде многомерной случайной величины, компоненты которой являются факторами риска.

2. Рассмотрены два варианта анализа риска. В первом случае оценивается вероятность опасных состояний системы, а во втором – непосредственно риск на основе введенной функции риска.

3. Для гауссовских стохастических систем предложены модели управления риском на основе его минимизации или достижения заданного уровня, используя в качестве управляющих переменных числовые характеристики случайного вектора – вектор математических ожиданий и ковариационную матрицу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воробьев Ю.Л., Малинецкий Г.Г., Махутов Н.А.* Управление риском и устойчивое развитие: Человеческое измерение // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8. № 6. С. 12-26.

2. *Вишняков Я.Д., Радаев Н.Н.* Общая теория рисков. М.: Академия, 2008. 368 с.

3. *Тырсин А.Н., Сурина А.А.* Моделирование риска в многомерных стохастических системах // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 2 (39). С. 65-72.

4. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2005. 448 с.

5. *Пантелеев А.В., Летова Т.А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2008. 544 с.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 18 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Тырсин Александр Николаевич, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор технических наук, зав. кафедрой прикладной математики, e-mail: at2001@yandex.ru

Сурина Альфия Адгамовна, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск, Российская Федерация, аспирант, кафедра прикладной математики и программирования, e-mail: dallila87@mail.ru

Для цитирования: *Тырсин А.Н., Сурина А.А.* Модели мониторинга и управления риском в гауссовских стохастических системах // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 776–783. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-776-783

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-776-783

MODELS OF MONITORING AND MANAGEMENT OF RISK IN GAUSSIAN STOCHASTIC SYSTEMS

A. A. Tyrsin[1], **A. A. Surina**[2]

[1] Ural Federal University named after first President of Russia B.N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation
E-mail: at2001@yandex.ru
[2] South Ural State University (national research university)
76 Lenin Prospekt, Chelyabinsk 454080, Russian Federation
E-mail: dallila87@mail.ru

Abstract. The risk model of multidimensional stochastic systems is described. It is based on the hypothesis that the risk is characterized by probabilistic properties of components of multidimensional stochastic system which are used as risk factors. The case of the Gaussian stochastic systems is investigated. The model of risk monitoring allows to estimate the current risk of system and the contribution of all its components. Models of risk management are optimizing tasks. As the target functions the conditional minimum of risk and achievement of the given level by it can be used at minimum changes of probabilistic characteristics of the system.
Key words: model; risk; stochastic system; random vector; normal distribution; monitoring; optimization

REFERENCES

1. Vorob'ev Yu.G., Malinetskiy G.G., Makhutov N.A. Upravleniye riskom i ustoychivoye razvitiye: Chelovecheskoye izmereniye [Risk management and sustainable development. Humanitarian dimension]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika – Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2000, vol. 8, no. 6, pp. 12-26. (In Russian).

2. Vishnyakov Ya.D., Radaev N.N. *Obshchaya teoriya riskov* [General Theory of Risks]. Moscow, Akademiya Publ., 2008, 368 p. (In Russian).

3. Tyrsin A.N., Surina A.A. Modelirovaniye riska v mnogomernykh stokhasticheskikh sistemakh [Modeling of risk in multidimensional stochastic systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2017, no. 2 (39), pp. 65-72. (In Russian).

4. Gnedenko B.V. *Kurs teorii veroyatnostey* [Probability Theory Course]. Moscow, Editorial URSS, 2005, 448 p. (In Russian).

5. Panteleyev A.V., Letova T.A. *Metody optimizatsii v primerakh i zadachakh* [Optimization Methods in Examples and Tasks]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2008, 544 p. (In Russian).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 17-01-00315a).

Received 16 April 2018
Reviewed 18 May 2018
Accepted for press 26 June 2018
There is no conflict of interests.

Tyrsin Alexander Nikolaevich, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Science in technology, Head of Department of Applied Mathematics, e-mail:at2001@yandex.ru

Surina Alfiya Adgamovna, South Ural State University (national research university), Chelyabinsk, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Department of Applied Mathematics and Programming, e-mail: dallila87@mail.ru

For citation: Tyrsin A.N., Surina A.A. Modeli monitoringa i upravleniya riskom v gaussovskikh stokhasticheskikh sistemakh [Models of monitoring and management of risk in Gaussian stochastic systems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 776–783. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-776-783 (In Russian, Abstr. in Engl.).